

Raport științific

privind implementarea proiectului PCE 6/2022 “AsyDiL” în 2022

0. Introducere

Proiectul “Învățarea asimetrică a dicționarelor” (Asymmetric Dictionary Learning—AsyDiL) are ca scop deducerea unor algoritmi pentru reprezentări rare și învățarea dicționarelor atunci când, în reprezentările rare aferente, atomii nu mai sunt simpli vectori ficși, ci sunt aleși dintr-o mulțime infinită, de exemplu un con. În acest fel cresc flexibilitatea și precizia reprezentării. Printre aplicațiile posibile se găsesc detecția de anomalii, eliminarea zgomotului, clasificare.

Conținutul raportului:

1. Descriere științifică, cu punerea în evidență a rezultatelor etapei anuale și gradul de realizare a obiectivelor.
2. Un sumar al progresului (livrabile realizate, indicatori de rezultat, diseminarea rezultatelor, justificare diferențe, dacă e cazul)
3. Un rezumat executiv al activităților realizate în perioada de implementare
4. Alte informații despre proiect
5. Concluzii
6. Bibliografie

1. Descriere științifică

Etapa 2022 a proiectului AsyDiL are trei activități

- Reprezentări rare cu atomi-mulțime uniforme
- Reprezentări rare cu atomi-mulțime probabiliști
- Învățarea dicționarelor cu atomi mulțime (bazată pe euristici)

Vom prezenta în această secțiune rezultatele obținute pentru fiecare din activități.

1.1 Reprezentări rare cu atomi-mulțime uniforme

Primul tip de reprezentare studiat este cel în care fiecare atom al dicționarului pentru reprezentare rară este un con $\mathcal{C}(d, \rho)$, în care d , cu $\|d\| = 1$, este atomul central și ρ este raza conului, care conține toți vectorii a , cu $\|a\| = 1$, pentru care $\|a - d\| \leq \rho$. Pentru reprezentarea rară, atunci când un atom-com d este selectat, din el se utilizează atomul efectiv a care este cel mai util în minimizarea erorii de reprezentare. Fig.1 ilustrează reprezentarea unui semnal y ca o combinație liniară a doi atomi-com, $x_1 a_1 + x_2 a_2$. Atomii efectivi sunt aleși astfel încât planul produs de ei să fie cel mai apropiat de y , aceasta fiind reprezentarea optimă.

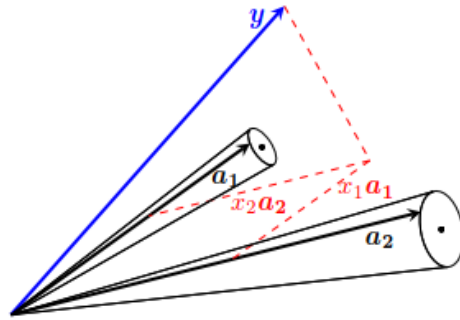


Fig.1 Aproximarea unui semnal prin combinația liniară a doi atomi

Cercetarea în această direcție a produs articolul [IBD22], care poate fi consultat in extenso pe site-ul proiectului și din care rezumăm aici rezultatele principale.

1.1.1 Orthogonal Matching Pursuit cu atomi con

Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [PRK93] este unul din algoritmii de bază pentru calculul reprezentărilor rare, fiind preferat pentru complexitatea scăzută și calitatea foarte bună. Dându-se un dicționar $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$, cu $m \leq n$, un semnal y și un nivel de sparsitate s , se dorește reprezentarea x conținând s elemente nenule astfel încât $\|y - Ax\|$ să fie minimă. Problema este NP-completă, dar OMP calculează de obicei soluția optimă sau o bună aproximare a acesteia.

OMP este un algoritm lacom, care construiește suportul x adăugând pe rand câte un atom. OMP are două operații importante: i) alegerea următorului atom ca fiind cel care are cea mai mare proiecție pe reziduul curent al reprezentării (sau, altfel zis, atomul cel mai apropiat de reziduul curent); ii) calculul soluției în sensul celor mai mici pătrate (CMMP) pentru suportul curent (și deci a reziduului asociat). Pentru extinderea la atomi con trebuie găsite soluții eficiente pentru aceste două operații.

Atomul dintr-un con cel mai apropiat de un vector dat se poate calcula eficient așa cum se arată în [IBD22], proiecția asociată fiind și ea ușor de calculat. Problema se poate rezolva în planul format de vector și de atomul central al conului, adică este o simplă problemă de geometrie plană. Operațiile sunt vectoriale, deci complexitatea este similară cu cea a produsului scalar necesar în OMP.

Calculul soluției CMMP nu mai este așa ușor ca la OMP standard, pentru că atomii efectivi determinați la pasul anterior nu mai sunt optimi la pasul curent, după adăugarea unui nou atom (optim doar în contextul celorlalți). Soluția CMMP poate fi găsită iterativ, prin proiecții succesive pe fiecare con; se țin ficși toți atomii efectivi, mai puțin unul, și se determină noua valoare a acestui atom prin proiecția reziduului pe conul atomului (ceea ce schimbă atomul efectiv). Operația este identică cu proiecția de la alegerea următorului atom. După mai multe runde de proiecții succesive (algoritm vorbind, aceasta este o operație de coborâre pe coordonate), soluția CMMP este aproximată suficient de bine.

Algoritmul 2 din [IBD22] prezintă în detaliu algoritmul schițat mai sus și numit Cone-OMP. Complexitatea lui este doar de câteva ori mai mare decât cea a algoritmului OMP, ceea ce este un rezultat remarcabil, având în vedere dificultatea aparentă a optimizării cu atomi con.

1.1.2 Aplicație la detecția de anomalii în semnale ECG

Reprezentarea cu atomi con are un punct slab evident: chiar dacă același atom con este folosit pentru reprezentarea mai multor semnale, atomul efectiv este de fiecare dată altul. Reconstrucția semnalului ar necesita memorarea tuturor atomilor efectivi, ceea ce ar consuma excesiv de multă memorie. Totuși, în detecția de anomalii poate fi utilizată doar eroarea de reprezentare, care se calculează odată cu reprezentarea de către Cone-OMP. Ideea de bază, folosită și în [AEH15], este de a asocia erorile mari cu anomaliile, deoarece semnalele anormale, fiind rare, sunt reprezentate mai prost decât cele normale, care sunt multe.

Am aplicat Cone-OMP pentru detecția de anomalii în baza de date MIT-BIH pentru aritmii cardiace [MoMa01]. Am analizat înregistrarea #109, la fel ca în [AEH15], utilizând o preprocesare similară. Semnalul ECG este eșantionat la 360 Hz și acoperă aproximativ 30 de minute. Conține 2530 de bătăi, anomalii fiind 38 de contracții ventriculare premature (PVC) și 2 fuziuni de bătăi ventriculare și normale. Din semnal au fost extrase toate ferestrele de lungime 256, reduse la 32 prin PCA. Ferestrele sunt grupate în 6 segmente de aproximativ 5 minute fiecare (108000 semnale). Am antrenat câte un dicționar pentru fiecare segment folosind 40 de iterații ale K-SVD [AEB06]. Pentru fiecare fereastră, am calculat erorile de reprezentare cu OMP și Cone-OMP. Menționăm că în [AEH15] a fost utilizat doar OMP.

Pentru fiecare bătaie folosim erorile de reprezentare din 201 ferestre: cea centrată în punctul R și câte 100 la stânga și la dreapta. Eroarea mediană este cea reprezentativă pentru fereastră. Bătăile cu cea mai mare eroare mediană sunt considerate anomalii. Programele MATLAB sunt disponibile la <http://asydil.upb.ro/software/>.

Am efectuat teste pentru dicționare cu $n \in \{64,96,128\}$ atomi și cu nivel de sparsitate $s \in \{2,3,4,5\}$. Folosim conuri cu raze egale, $\rho \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.1\}$. Pentru fiecare triplet (n, s, ρ) antrenăm 10 dicționare pentru fiecare segment, pornind de la inițializări aleatoare, și calculăm 10 erori reprezentative pentru fiecare bătaie, așa cum este descris mai sus. Pe baza lor decidem care sunt anomaliile, apoi calculăm ROC AUC și numărul de fals pozitive atunci când rata adevărat pozitivelor este 100%, 97.5% și 95%, ceea ce corespunde cu 40, 39, respectiv 38 de anomalii adevărate detectate.

Tabelul 1 prezintă cele mai bune rezultate pentru cele două metode. Se vede clar că Cone-OMP este superior, reducând numărul de fals pozitive până aproape de jumătate față de metoda bazată pe OMP.

Pentru a demonstra robustețea față de parametrii metodei, în special raza, prezentăm în Fig. 2 o comparație a valorilor ROC AUC obținute cu OMP și Cone-OMP. Codul reprezentării este dat în

descrierea figurii. Culorile albastru și roșu arată cazurile în care Cone-OMP este mai bun, respectiv mai bun pentru fiecare dintre cele 10 dicționare. Pentru multe perechi (n, s) , sunt mai multe raze pentru care Cone-OMP dă un rezultat mai bun decât cel mai bun rezultat OMP (0.99971, vezi prima linie din Tabelul 1), marcate cu pătrate. Cone-OMP tinde să dea rezultate mai bune pentru dimensiuni mai mici ale dicționarului. Robustețea Cone-OMP este vizibilă: sunt multe valori ale razelor pentru care Cone-OMP e mai bun ca OMP. Rezultatele sunt evident mai bune decât cele din [AEH15], unde numărul de fals pozitive este mult mai mare.

n	s	ρ	ROC AUC	FP TP=40	FP TP=39	FP TP=38
96	3	-	0.99971	10.3	6.4	4.2
96	4	-	0.99971	11.7	6	3.6
128	4	-	0.99968	10.2	6.7	4.9
64	3	0.08	0.99984	6.7	4.7	2.4
96	3	0.05	0.99980	6.3	4	2.8
64	4	0.07	0.99986	5.7	2.8	1.8
96	4	0.05	0.99989	6.7	3	0.9
128	4	0.05	0.99977	8.3	3.7	2.8

Tabel 1. Cele mai bune rezultate obținute de OMP (partea de sus) și Cone-OMP (partea de jos).

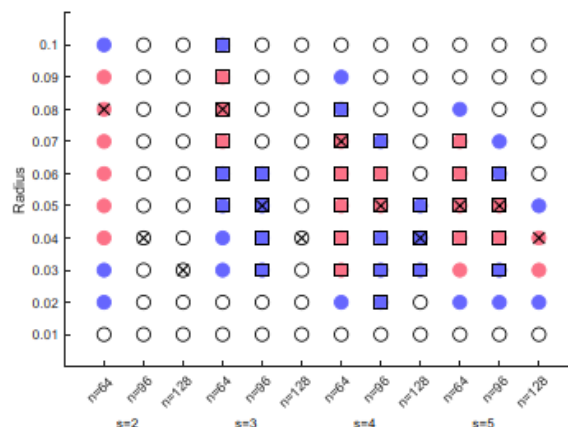


Fig.2 Comparație între valorile ROC AUC obținute cu OMP și Cone-OMP. Cercuri albe: OMP este mai bun în medie. Albastru: Cone-OMP este mai bun în medie. Roșu: Cone-OMP este mai bun în fiecare din cele 10 teste. Pătrat: Cone-OMP este mai bun decât cel mai bun rezultat OMP. Simbolul x: cea mai bună rază pentru valorile n, s curente.

Fig.3 prezintă erorile reprezentative, normalizate astfel încât cea mai mare eroare este egală cu 1, pentru un singur dicționar, cu $n = 96, s = 4, \rho = 0.04$. Se observă că Cone-OMP poate modela mai bine bătăile normale, erorile pentru acestea fiind mult mai aproape de zero decât cele ale OMP. Cu toate acestea, bătăile anormale au erori mari, ceea ce arată buna performanță a Cone-OMP și potențialul de a rezolva și alte probleme de detecție de anomalii.

Concluzie. Gradul de realizare a acestei activități: complet.

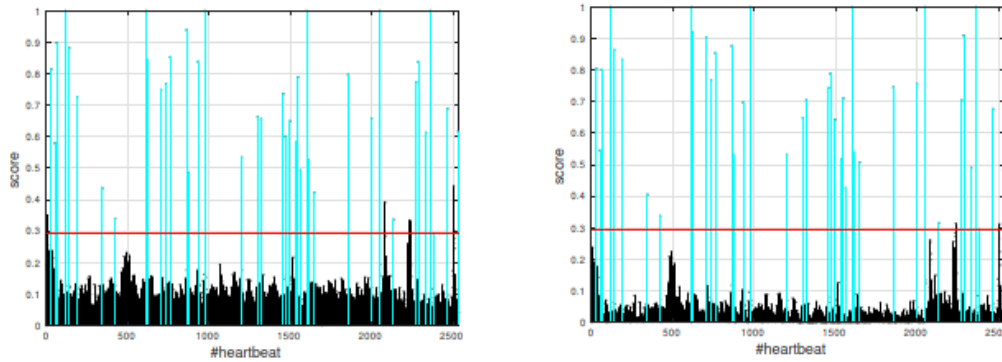


Fig.3. Erori reprezentative pentru fiecare bătaie, calculate cu OMP (stânga) și Cone-OMP (dreapta). Negru: normal. Cyan: anomalie. Roșu: cea mai mică eroare a unei anomalii.

1.2. Învățarea dicționarelor cu atomi mulțime

Problema antrenării de dicționare (dictionary learning—DL) pentru atomi mulțime se pune similar celei clasice, în care atomii sunt vectori, în sensul că se dau semnalele de antrenare, organizate într-o matrice $Y \in R^{m \times N}$ și trebuie găsit dicționarul care dă reprezentarea lor rară optimă, pentru un nivel de sparsitate s dat. Diferența e că acum trebuie antrenați și atomii centrali și razele conurilor. În această fază a proiectului am presupus razele ca fiind fixe (dar nu neapărat egale) și am antrenat doar atomii centrali, concentrându-ne asupra cazului în care atomii au structură de con.

1.2.1 Algoritmi pentru învățarea dicționarelor cu atomi con

Algoritmii DL propuși au forma generală obișnuită. Ei sunt iterativi, iar fiecare iterație conține două etape: i) reprezentare rară, în care dicționarul este fix și se calculează reprezentările; pentru aceasta se folosește algoritmul Cone-OMP descris mai sus; ii) actualizarea dicționarului, în care reprezentările sunt fixe și se modifică atomii. Vom vorbi în continuare doar despre a doua etapă, prima fiind deja rezolvată.

O problemă importantă este aceea dacă memorăm sau nu reprezentările produse de Cone-OMP pentru a le folosi la sfârșitul etapei de reprezentare. Deoarece aceasta înseamnă un consum mare de memorie, ne-am orientat către algoritmi care utilizează imediat atomii efectivi produși de Cone-OMP, deși proiectarea acestora este mai dificilă. Prezentăm aici pe scurt doi algoritmi, unul inspirat de o metodă de optimizare, altul euristic.

Actualizare cu PAK-SVD. Algoritmul AK-SVD [RZE08] este unul dintre cei mai simpli algoritmi DL eficienți; el optimizează atomii succesiv. Notăm d_j atomul central care se optimizează la un moment dat, ceilalți atomi fiind ficși, și F matricea de eroare fără contribuția acestui atom; coloana l a acestei matrice, corespunzând semnalului l , este

$$f_l = y_l - \sum_{i \neq j} a_{il} x_{il}$$

În această relație, a_{il} este atomul efectiv i utilizat pentru reprezentarea semnalului l , iar x_{il} este coeficientul asociat atomului în reprezentarea liniară; coeficientul este zero în cazul în care atomul nu este utilizat în reprezentarea rară.

Eroarea pătratică asociată este

$$\sum_l \|f_l - a_{jl}x_{jl}\|^2$$

Egalând cu zero derivata acestei erori, în condițiile atomilor con conduce, după un raționament care nu este detaliat aici, la regula de actualizare

$$d_j \leftarrow \sum_l x_{jl} (f_l - x_{jl}(a_{jl} - d_j))$$

urmată de normalizare. Observăm că actualizarea din această formulă se poate calcula pe măsură ce atomii efectivi și coeficienții lor sunt produși de Cone-OMP, deci nu este necesară memorarea lor.

În algoritmul AK-SVD standard, actualizarea atomilor se face secvențial. În contextul atomilor con, modificarea unui singur atom d_j ar implica recalcularea tuturor atomilor efectivi care apar în semnalele unde d_j apare în reprezentare, ceea ce ar însemna un efort de calcul imens. De aceea, am adaptat algoritmul Parallel AK-SVD (PAK-SVD) [Dulr18], în care actualizarea atomilor se face în paralel, atomii noi fiind calculați independent din cei curenți. Se observă că acest lucru este posibil în regula de actualizare de mai sus.

Actualizare prin mediere. O altă variantă de actualizare, tot în paralel, este euristică și se bazează pe medierea atomilor efectivi

$$\tilde{d}_j = \sum_{l=1}^N \beta_{jl} a_{jl}$$

unde $\beta_{jl} \geq 0$ sunt ponderi. Ideea este similară algoritmilor de clustering. Este natural să dăm ponderi mai mari atomilor cu coeficienți mai mari, deoarece rolul lor în reprezentare este mai mare. Experimentele numerice sugerează că alegerea $\beta_{jl} = |x_{jl}|$ este în general mai bună decât alte moduri de ponderare încercate (evident, nu se poate spune că e alegerea optimă în acest context).

Mai mult, este util să considerăm \tilde{d}_j doar o direcție de progres și să utilizăm regula de actualizare

$$d_j \leftarrow \gamma \tilde{d}_j + (1 - \gamma) d_j$$

unde γ dictează viteza de avans; deși de obicei se alege $0 < \gamma < 1$, se poate lua $\gamma > 1$ pentru o abordare mai agresivă.

Păstrarea incoerenței dicționarului. O problemă a dicționarului cu atomi con este necesitatea de a asigura că ei sunt disjunși. Dacă două conuri se intersectează, atunci doi atomi efectivi din zona comună pot reprezenta orice vector, ceea ce face întreaga idee de reprezentare un nonsens. Am propus și implementat următoarea soluție pentru asigurarea unei distanțe minime δ_{\min} între doi atomi con, în sensul că $\|a_1 - a_2\| \geq \delta_{\min}$ pentru orice atomi efectivi a_1, a_2 din conuri

diferite. După fiecare iterație a algoritmului DL, se face lista perechilor de atomi (centrali) din noul dicționar care nu respectă distanța impusă. Fiecare pereche este împinsă către valorile anterioare ale atomilor până când distanța este respectată; pentru aceasta, am dezvoltat un algoritm bazat pe bisecție. Apoi se verifică din nou dicționarul și se repetă procedura. Succesul este garantat prin faptul că dicționarul anterior respectă distanța minimă.

Rezultate. Algoritmii descriși mai sus au fost implementați în MATLAB și testați pe date generate artificial. Fără a detalia întreaga procedură, dăm doar o imagine a rezultatelor obținute. Figura 4 arată convergența celor două metode, algoritmi fiind lăsați să execute 200 de iterații. Razele conurilor au fost generate aleator între 0 și o rază maximă (0.25 în stânga, 0.2 în dreapta). Distanța minimă între doi atomi din dicționar este 0.2, iar dimensiunea dicționarului 40×80 . Linia albastră arată nivelul erorii pentru dicționarul adevărat (cel cu care au fost generate datele), la care s-au utilizat aceleași raze; este deci vorba de reprezentare cu atomi con, nu de reprezentarea clasică, pentru care eroarea este mai mică. Cu roșu este reprezentată eroarea similară obținută pentru dicționarul antrenat cu AK-SVD standard, pentru a verifica ce performanțe se pot obține antrenând clasic și abia apoi reprezentând cu atomi con, care au raze alocate aleator atomilor. Algoritmul PAK-SVD cu atomi con obține rezultate bune cu regularitate, fiind superior metodei AK-SVD standard și chiar și dicționarului adevărat. Algoritmul cu mediere este bun pentru raze mai mari, dar când razele scad are performanțe nesatisfăcătoare. Desigur, experimentele nu s-au terminat și rezultatele viitoare pot conduce la rafinarea algoritmilor propuși.

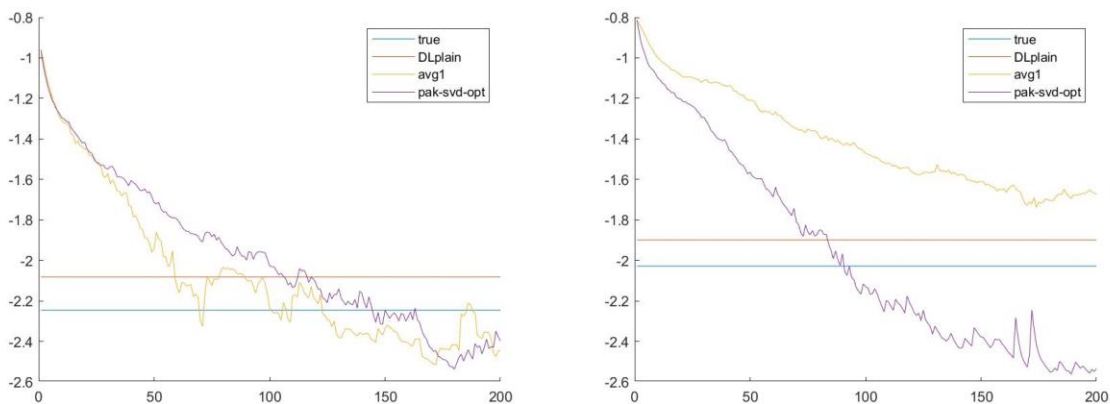


Fig. 4. Evoluția erorii pentru algoritmi de antrenare de dicționar pentru atomi con.

1.2.2 Algoritmi pentru proiectarea dicționarelor și frame-urilor incoerente

Explorând diverse metode pentru asigurarea incoerenței dicționarelor cu atomi con (adică păstrarea distanței între atomi), am testat și o funcție barieră. Deși am adoptat în cele din urmă o soluție mai simplă, descrisă mai sus, funcția barieră s-a dovedit foarte utilă pentru proiectarea dicționarelor standard incoerente și, în special, pentru proiectarea frame-urilor (aproape)

grassmanniene. În contextul algoritmilor pentru aceste probleme, în care atomii sunt optimizați succesiv, funcția barieră pentru atomul d_j este

$$b(d_j) = \sum_{i \neq j} [\max(0, M - \|d_i - d_j\|^2) + \max(0, M - \|d_i + d_j\|^2)]$$

unde M este un parametru pentru nivelul acceptabil de coerență. Se observă că dacă atomii sunt apropiați, atunci fie diferența lor, fie suma lor (în funcție de orientarea relativă), este mică și atunci funcția barieră este pozitivă. În schimb, atunci când atomii sunt depărtați, funcția barieră este nulă. Deci, minimizarea funcției barieră asigură în principiu o distanță minimă între atomi.

Frame-urile grassmanniene sunt matrice $D \in R^{m \times n}$, cu $m > n$, în care coloanele (atomii, în terminologia DL) se află la distanța maximă posibilă. Ele sunt utile în codare și comunicații, printre altele [StHe03, MeDa14]. Pentru proiectarea lor, ar trebui optimizată funcția

$$\min_D \max_{1 \leq i < j \leq n} |d_i^T d_j|$$

cu condiția $\|d_j\| = 1$ a normalizării atomilor. Aceasta este o funcție neconvexă greu de optimizat, în special atunci când dimensiunile matricei sunt mari. Multe metode [TDHS05, ZoBo15, RuGo16] dau rezultate bune pentru matrice mici, dar devin mult prea lente pentru matrice medii sau mari. Alte metode sunt mai rapide și vor fi menționate ulterior.

Utilizând funcția obiectiv dintr-un articol anterior [Dumi17] la care adăugăm bariera de mai sus, am decis optimizarea funcției

$$f(d_j) = \|W\bar{D}^T d_j\|^2 + \lambda b(d_j)$$

unde \bar{D} este dicționarul fără coloana j , iar W o matrice diagonală ce depinde de produsele scalare $|d_i^T d_j|$ și de valoarea dorită a coerenței. Pentru optimizare, am propus o metodă de gradient cu pas adaptiv. Mai multe detalii pot fi găsite în [ID22].

Câteva rezultate semnificative sunt prezentate în Tabelul 2. Am comparat metoda propusă, numită IDB (Incoherence via a Distance Barrier), cu două dintre metodele cu rezultate bune, anume ISPM [Dumi17] și FLIP [JBS21]. Se observă că IDB dă rezultate mai bune decât ambele metode pentru o gamă largă de dimensiuni. Coloana ISPM+FLIP conține rezultatele pentru metoda FLIP (care este mai lentă) inițializată cu rezultatul ISPM (care este mult mai rapid). Ca viteză, IDB este de câteva ori mai lentă decât ISPM, dar clar mai rapidă decât FLIP.

m	n	bound	ISPM	FLIP	ISPM +FLIP	IDB
5	10	0.3333	0.3350	0.3338	0.3338	0.3333
50	60	0.0582	0.0775	0.0666	0.0634	0.0625
90	100	0.0335	0.0537	0.0384	0.0384	0.0375
100	110	0.0303	0.0495	0.0349	0.0350	0.0340
200	210	0.0155	0.0286	0.0181	0.0181	0.0175
300	310	0.0104	0.0209	0.0122	0.0123	0.0120
500	510	0.0063	0.0137	0.0074	0.0075	0.00732
500	550	0.0135	0.0203	0.0156	0.0151	0.0151
700	710	0.0045	0.0104	0.0053	0.0054	0.00527
900	1100	0.0142	0.0187	0.0166	0.0156	0.0156
2000	2500	0.0100	0.0130	0.0126	0.0121	0.01094
25	800	0.2871	0.3696	0.3896	0.3694	0.3687
30	800	0.2417	0.3189	0.3408	0.3189	0.3172
100	1000	0.0949	0.1350	0.1470	0.1350	0.1342

Tabel 2. Coerențele frame-urilor calculate de câteva metode

Alte rezultate, încă neintroduse în [ID22], arată că IDB este mai bună decât alte metode foarte recente, anume ICBP [TSR19] și TELET [JyBa22].

1.2.3 Alte rezultate în învățarea dicționarelor

În prima lună a proiectului am finalizat o colaborare pe tema învățării dicționarelor cu cercetători de la Auckland University, Noua Zeelandă. Tema este imputarea seriilor de timp: atunci când din seriile de timp lipsesc eşantioane, datorită nefuncționării unor senzori, erorilor de transmisie sau altor motive, prelucrarea statistică impune deseori completarea seriilor cu valori calculate. DL este o idee relativ nouă în această problemă.

În articolul [ZDLG22], am contribuit cu un algoritm a cărui extensie la atomi con merită investigată. Este vorba de DL cu date lipsă și minimizare în norma 1, al cărui scop este minimizarea funcției

$$\|M \odot (Y - DX)\|_{1,1}$$

unde M este o mască, având 1 în pozițiile în care eşantioanele din datele Y există și 0 acolo unde lipsesc, $Y - DX$ este eroarea tipică învățării de dicționare pentru reprezentări rare, iar norma utilizată este

$$\|E\|_{1,1} = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^N |e_{il}|$$

Algoritmul presupune un algoritm specific de reprezentare rară cu minimizare în norma 1 (care înlocuiește OMP din AK-SVD), precum și o metodă de optimizare a atomilor.

Grupul din Auckland a contribuit cu criteriile de tip teoria informației și cu testarea pe serii de timp provenite din măsurători de temperatură și alte date meteo din mai multe regiuni ale globului.

Concluzie. Gradul de realizare a acestei activități: complet, în termeni de rezultate obținute și publicații. O parte din rezultate vor fi concretizate în articole în viitorul imediat, împreună cu rezultatele de la etapa 2.2 din 2023.

1.3. Reprezentări rare cu atomi-mulțime probabiliști

Atomii con discutați mai sus conțin vectori al căror uz într-o reprezentare, ca atomi efectivi, este dictat strict de apropierea de semnalul care trebuie reprezentat. Cel mai apropiat atom efectiv de un vector dat este fie pe suprafața conului, dacă vectorul este în afara conului (iar atomul efectiv se calculează prin proiecție), sau chiar vectorul, dacă este în interiorul conului. Altfel, atomii din con au a priori probabilități egale de a fi utilizați.

O alternativă, studiată în această activitate, este asocierea unei probabilități fiecărui potențial atom efectiv. Pentru studiu, am ales atomii gaussieni, pentru care probabilitatea de asociere cu un atom central are o distribuție gaussiană. Mai precis, dacă d este un atom central, atunci un atom efectiv a aparține atomului $G(d, \sigma)$ cu probabilitatea

$$p(a, d) \sim \exp\left(-\frac{\|a - d\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Am ales cea mai simplă formă, cu distribuție simetrică.

Pentru un dicționar D , asociem fiecărui atom d_j o distribuție $G(d_j, \sigma_j)$. Deci, raza atomilor con este înlocuită de deviația standard, iar apartenența la mulțimea atom nu mai este binară (da/nu), ci are asociată o probabilitate. Pentru a calcula o reprezentare în acest context, punem problema în felul următor. Dorim să maximizăm probabilitatea atomilor din reprezentare, asigurând în același timp și o eroare mică de reprezentare. Un compromis este acela de a minimiza funcția

$$\min_{a_i \in \mathbb{R}^m, \alpha_i \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \|a_i - d_i\|^2 + \lambda \|y - \sum_{i=1}^n x_i a_i\|^2$$

Primul termen reprezintă logaritmul negativ al probabilității (log-likelihood) atomilor efectivi $a_i \in G(d_i, \sigma_i)$, deci minimizarea lui maximizează probabilitatea. Al doilea termen, ponderat cu o constantă λ , este eroarea de reprezentare a semnalului y .

Deși ambii termeni sunt pătratici, problema nu este convexă din cauza prezenței coeficienților x_i . Propunem un algoritm în care atomii sunt optimizați unul câte unul, toți ceilalți fiind considerați ficși, împreună cu coeficienții reprezentărilor lor. În aceste condiții, coeficientul atomului necunoscut se poate exprima analitic în funcție de acesta. Se poate deci obține o ecuație în atomul necunoscut a , anume

$$\left[\frac{1}{\sigma} + \lambda \frac{(a^T \tilde{y})^2}{\|a\|^4} \right] x = \frac{1}{\sigma} d + \lambda \frac{a^T \tilde{y}}{\|a\|^2} \tilde{y}$$

unde \tilde{y} este reziduul curent al reprezentării în condițiile cunoașterii tuturor atomilor, mai puțin cel curent. Această ecuație spune că a este o combinație liniară între d și \tilde{y} , cu coeficienți depinzând de a . Rezolvarea ei se poate face prin bisecție. (Este posibil să existe metode mai rapide, ce vor fi explorate ulterior, dar bisecția este robustă și asigură găsirea unei soluții.)

Rezultatele experimentale pe date simulate arată convergența metodei propuse.

Un echivalent al OMP se poate obține simplu, ținând seama că cel mai apropiat atom gaussian de un vector dat e cel pentru care probabilitatea vectorului e cea mai mare, ceea ce se determină printr-un calcul banal, cu complexitate similară cu a OMP, dar mai mică decât a Cone-OMP. În schimb, calculul aproximației prin metoda de mai sus este (mult) mai lent decât la Cone-OMP.

Concluzie. Gradul de realizare a acestei activități: satisfăcător, în acest moment (1 decembrie). Până la sfârșitul anului se pot testa complet algoritmi și schița un articol pe această temă.

2. Sumarul progresului

În cele 6 luni (1 iunie—1 decembrie) de la începerea proiectului am reușit următoarele publicații:

- Un articol publicat [ZDLG22]
- Un articol trimis la conferință [IBD22]
- Un articol de revistă în curs de finalizare [ID22], care va fi trimis în decembrie. Am încheiat experimentele și avem deja o primă versiune a textului, deci nu mai rămâne decât redactarea versiunii finale.

Aceste articole pot fi găsite pe site-ul proiectului, <http://asydil.upb.ro/>. Tot acolo se află deja programele aferente articolului [IBD22]. Programele pe care se bazează rezultatele din [ID22] vor fi și ele puse pe site.

Rezultatele descrise mai sus sunt peste cele prevăzute în planul de realizare, atât la publicații, cât și la algoritmi.

Prezentăm în continuare sumarul progresului pentru fiecare dintre cele trei activități ale proiectului din anul 2022.

2.1. Reprezentări rare cu atomi-mulțime uniforme

Am studiat configurația cu atomi con și am propus un algoritm eficient de reprezentare rară. Am testat algoritmul pe diverse date simulate. L-am folosit pentru detecție de anomalii în semnale ECG cu rezultate mult mai bune decât cele existente. Pe baza algoritmului și a rezultatelor numerice am trimis articolul [IBD22] la conferința ICASSP, cea mai bună în domeniul prelucrării semnalelor. Programele aferente sunt prezente pe site-ul proiectului. Considerăm această activitate ca fiind complet realizată.

2.2. Învățarea dicționarelor cu atomi mulțime

Lucrând tot cu dicționare cu atomi con, am proiectat doi algoritmi de învățare de dicționare (unul euristic, unul bazat pe optimizare), cu asigurarea unei distanțe minime între conuri. Algoritmii sunt testați pe date simulate. Împreună cu rezultatele de la activitatea anterioară, vor face obiectul unui articol de revistă ce va fi realizat în primele luni ale lui 2023.

Pe baza unei funcții barieră nefolosită în acest context, am propus algoritmi noi pentru proiectarea frame-urilor și învățarea dicționarelor incoerente. Am început redactarea unui articol de revistă [ID22], ce va fi finalizat și trimis la revista Signal Processing în cursul lunii decembrie. Programele asociate vor fi puse pe site.

De asemenea, am finalizat o cercetare anterioară asupra utilizării învățării dicționarelor în completarea datelor lipsă din seriile de timp, folosind optimizare în norma 1, rezultate publicate în [ZDLG22].

Considerăm această activitate ca fiind complet realizată în termenii numărului de livrabile. Articolul menționat în primul paragraf va cuprinde și rezultate deja obținute, inițial prevăzute în cadrul activității 2.2 din 2023.

2.3. Reprezentări rare cu atomi-mulțime probabiliști

Am proiectat un algoritm pentru calculul reprezentărilor rare cu atomi având structura unei distribuții de probabilitate gaussiană. Am redactat descrierea algoritmului și am implementat programul asociat. Am testat algoritmul pe date simulate. Testările sunt deocamdată parțiale și vor fi continuate în decembrie. Articolul de conferință prevăzut la această activitate, inițial prevăzut

să conțină și rezultate de la prima activitate (reprezentări rare cu atomi-mulțime uniformi), a fost realizat doar cu rezultate de la acea activitate. Planificăm scrierea unui articol separat cu rezultatele de la această activitate.

Considerăm că această activitate este deja realizată în bună măsură și va fi încheiată conform planului la sfârșitul anului.

3. Rezumat executiv

Proiectul “Învățarea asimetrică a dicționarelor” (Asymmetric Dictionary Learning—AsyDiL) are ca scop deducerea unor algoritmi pentru reprezentări rare și învățarea dicționarelor atunci când, în reprezentările rare aferente, atomii nu mai sunt simpli vectori ficși, ci sunt aleși dintr-o mulțime infinită, de exemplu un con în jurul atomului central. În acest fel cresc flexibilitatea și precizia reprezentării. Printre aplicațiile posibile se găsesc detecția de anomalii, eliminarea zgomotului, clasificare.

În etapa 2022, începută în iunie, am obținut următoarele rezultate semnificative:

- Un algoritm pentru calculul reprezentărilor rare pentru cazul dicționarelor cu atomi con, abordare complet nouă în această problemă. Algoritmul este doar puțin mai lent decât algoritmul uzual (Orthogonal Matching Pursuit) pentru dicționare cu atomi vectori. Am aplicat algoritmul, cu rezultate excelente, în detecția de anomalii în semnale ECG. Pe baza acestor rezultate a fost trimis un articol de conferință.
- Algoritmi pentru învățarea dicționarelor cu atomi con, care dau rezultate superioare asocierii de conuri unui dicționar standard antrenat cu metode clasice.
- Algoritmi pentru proiectarea frame-urilor incoerente și învățarea dicționarelor incoerente. În prima problemă am obținut rezultate superioare celor existente în literatura de specialitate. În a doua, am arătat că dicționarele astfel obținute pot avea atât eroare mai mică, cât și incoerență mai bună, decât cele obținute cu algoritmi obișnuiți, ceea ce este destul de surprinzător, eroarea și incoerența evoluând de obicei în direcții opuse. Rezultatele sunt cuprinse într-un articol în curs de finalizare.
- Un algoritm pentru învățarea dicționarelor în norma 1, cu date lipsă, în scopul completării acestora cu valori calculate cu reprezentări rare.

Site-ul proiectului, <http://asydil.upb.ro/>, conține articolele realizate și programe care ilustrează funcționarea algoritmilor asociați.

4. Alte informații despre proiect

Site-ul proiectului este <http://asydil.upb.ro/>.

Echipa inițială (Bogdan Dumitrescu, Andra Băltoiu, Denis Ilie-Ablachim, Cristian Zica) a fost completată în noiembrie cu Theodor Badea, doctorand al lui BD. Cooperarea între membrii echipei a fost mulțumitoare. Au avut loc întâlniri periodice, uneori online, în special în timpul verii.

Aceste întâlniri au fost deseori între directorul de proiect și unul sau doi membri ai echipei, deoarece orarul încărcat al cursurilor a îngreunat posibilitatea întâlnirilor întregului grup.

Reducerea bugetului pe 2022 cu 5% de către finanțator a avut un impact deocamdată neglijabil, dar desigur că ne dorim ca un astfel de eveniment să nu se repete sau măcar să fie anunțat din timp.

5. Concluzii

Considerăm că rezultatele obținute până acum sunt satisfăcătoare. Avem algoritmi inovativi de reprezentare rară și învățare a dicționarilor. Rezultatele sunt bune pe probleme simulate. Am reușit rezultate excelente în singura aplicație abordată până acum, detecția de anomalii în semnale ECG. Putem deci spune că o parte din rezultatele preconizate la începutul proiectului au fost obținute și că potențialul de cercetare al temei proiectului este confirmat.

Continuând în același ritm, putem încheia cu rezultate peste cele scontate la începutul proiectului.

Bibliografie

[AEH15] A. Adler, M. Elad, Y. Hel-Or, and E. Rivlin, "Sparse coding with anomaly detection," *Journal of Signal Processing Systems*, vol. 79, no. 2, pp. 179–188, 2015.

[AEB06] M. Aharon, M. Elad, and A. Bruckstein, "K-SVD: An Algorithm for Designing Overcomplete Dictionaries for Sparse Representation," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 54, no. 11, pp. 4311–4322, Nov. 2006.

[Dumi17] B. Dumitrescu. Designing Incoherent Frames with Only Matrix-Vector Multiplications. *IEEE Signal Proc. Letters*, 24(9):1265–1269, Sep. 2017.

[Dulr18] B. Dumitrescu, P. Irofti. *Dictionary Learning Algorithms and Applications*. Springer, 2018.

[IBD22] D.C. Ilie-Ablachim, A.Băltoiu, B.Dumitrescu, "Sparse representations with cone atoms", submitted to Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP) 2023, pdf file: http://asydil.upb.ro/wp-content/uploads/2022/10/cone_atoms_submitted.pdf

[ID22] D.C. Ilie-Ablachim, B.Dumitrescu, "Incoherent frames design and dictionary learning using a distance barrier", to be submitted, pdf file of current version: <http://asydil.upb.ro/wp-content/uploads/2022/10/IDB.pdf>

[JBS21] R. Jyothi, P. Babu, P. Stoica. Design of high-dimensional grassmannian frames via block minorization maximization. *IEEE Communications Letters*, 25(11):3624–3628, 2021.

- [JyBa22] R. Jyothi, P. Babu. TELET: A monotonic algorithm to design large dimensional equiangular tight frames for applications in compressed sensing. *Signal Processing*. 2022 Jun 1;195:108503.
- [MeDa14] A. Medra and T.N. Davidson. Flexible codebook design for limited feedback systems via sequential smooth optimization on the Grassmannian manifold. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62(5):1305–1318, 2014.
- [MoMa01] G.B. Moody and R.G. Mark, “The impact of the MIT-BIH arrhythmia database,” *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, vol. 20, no. 3, pp. 45–50, 2001.
- [PRK93] Y.C. Pati, R. Rezaifar, P.S. Krishnaprasad, “Orthogonal Matching Pursuit: Recursive Function Approximation with Applications to Wavelet Decomposition,” in *27th Asilomar Conf. Signals Systems Computers*, Nov. 1993, vol. 1, pp. 40–44.
- [RuGo16] C. Rusu and N. Gonzalez-Prelcic. Designing Incoherent Frames Through Convex Techniques for Optimized Compressed Sensing. *IEEE Trans.Signal Proc.*, 64(9):2334–2344, May 2016.
- [RZE08] R. Rubinstein, M. Zibulevsky, and M. Elad. Efficient Implementation of the K-SVD Algorithm Using Batch Orthogonal Matching Pursuit. Technical Report CS-2008-08, Technion Univ., Haifa, Israel, 2008.
- [StHe03] T. Strohmer and R.W. Heath. Grassmannian frames with applications to coding and communication. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 14(3):257–275, 2003.
- [TDHS05] J.A. Tropp, I.S. Dhillon, R.W. Heath Jr., and T. Strohmer. Designing structured tight frames via an alternating projection method. *IEEE Trans.Info. Th.*, 51(1):188–209, Jan. 2005.
- [TSR19] B. Tahir, S. Schwarz, and M. Rupp. Constructing Grassmannian frames by an iterative collision-based packing. *IEEE Signal Processing Letters*, 26(7):1056–1060, 2019.
- [ZDLG22] X.Zheng, B.Dumitrescu, J.Liu, C.D.Giurcaneanu – Multivariate time series imputation: An approach based on dictionary learning, *Entropy*, vol.24, no.8, pp.1057, July 2022, <https://www.mdpi.com/1099-4300/24/8/1057>
- [ZoBo15] H. Zorlein and M. Bossert. Coherence Optimization and Best Complex Antipodal Spherical Codes. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 63(24):6606–6615, Dec. 2015.